Apellido y nombres: ....
Padrón: .... Correo electrónico: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Segunda fecha. 7 de julio de 2015.

1		2		3		4	
a	b	a	b	a	b	a	b

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de al menos 4(cuatro) ítems, entre los cuales debe figurar uno del ejercicio 1 o del 2 y uno del ejercicio 3 o del 4.

Ejercicio 1.

(a) Hallar la región de convergencia de $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^2+n^2}$ con $a>0$ y probar que la convergencia es uniforme en la región cerrada. Justificar que f es una función holomorfa y encontrar su derivada. ¿Es, la serie resultante al derivar término a término la f, uniformemente convergente en la región cerrada?

(b) Hallar la función potencial de un campo de fuerzas, u, que verifica:

$$\begin{array}{rll} \nabla^2 u(x,y)=0 & \text{para} & x^2+y^2>4, \quad y>0 \\ u(x,0)=1 & \text{para} & |x|\geqslant 2 \\ u(x,y)=0 & \text{para} & x^2+y^2=4, \quad y>0 \end{array}$$

y calcular las equipotenciales y y las líneas de fuerza.

Ejercicio 2. Dado el problema:

$$\begin{cases} u_t=u_{xx} & 0<x<2\pi,\ t>0 \\ u(0,t)=0 & t\geqslant 0 \\ u(2\pi,t)=1 & t\geqslant 0 \\ u(x,0)=f(x) & 0\leqslant x\leqslant 2\pi \end{cases}$$

(a) Resolver para el caso particular en que $f(x)=x$ en $[0,2\pi]$.

(b) Establecer condiciones sobre $f(x)$ que aseguren que $u(x,0)=f(x)$ para todo $x\in[0,\ 2\pi]$.

Ejercicio 3.

(a) Enunciar y probar la propiedad que relaciona la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones con las transformadas de Fourier de ambas funciones, especificando las hipótesis necesarias para su validez.

(b) Calcular la transformada de Fourier de cada una de las siguientes funciones:

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } |t|\leqslant 1/2 \\ 0 & \text{si } |t|>1/2 \end{cases} \qquad g(t)=\begin{cases} 1-|t| & \text{si } |t|<1 \\ 1 & \text{si } |t|=1 \\ 0 & \text{si } |t|>1 \end{cases}$$

y comprobar que $\mathcal{F}[f*f]=\mathcal{F}[g]$ pero que no puede inferir que $(f*f)(t)=g(t)\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 4.

(a) Demostrar $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right](s)=\frac{\mathcal{L}[f](s)}{s}$, introduciendo las hipótesis necesarias.

(b) Hallar la función $y(t)$ solución de:

$$y''(t)+y(t)+2\int_0^t y(\tau)\,d\tau=H(t) \quad t\geqslant 0$$

con $y(0^+)=y'(0^+)=0$ y $H(t)$ la función de Heaviside.